Fonctions circulaires réciproques - Fonctions hyperboliques

1 - Fonctions circulaires réciproques :

a - Fonction Arc cosinus :

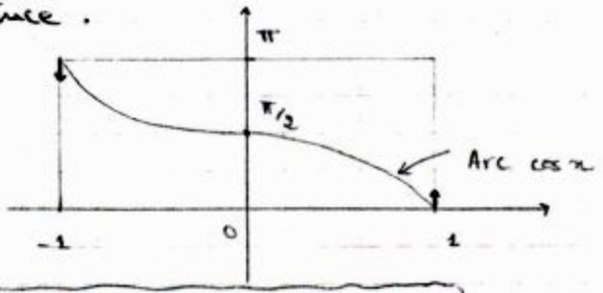
$$f\ [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$$
$$x \longmapsto f(x) = \cos x$$

est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$. De plus $f([0,\pi]) = [-1,1]$. Donc f est bijective et admet une fonction réciproque f^{-1} notée Arc cos x $\quad f^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$

$$x \longmapsto f^{-1}(x) = \text{Arc cos } x$$

est continue et strict décroissante sur $[-1,1]$

la courbe de f^{-1} s'obtient à partir de celle de f par symétrie par rapport à la première bissectrice.



on a : $\boxed{y = \text{Arc cos } x \iff \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}}$

- La fct Arc cos x est dérivable sur $]-1,1[$ avec :

$$\boxed{(\text{Arc cos } x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1,1[}$$

Dém : $x \in]-1,1[$. $(f^{-1})'(x) = ?$

ETUDUP .com

$\exists x_0 \in]0,\pi[$ tq : $x = f(x_0) = \cos x_0$

$(f^{-1})'(x) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

$= \dfrac{-1}{\sin x} = \dfrac{-1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x_0}} = \dfrac{-1}{+\sqrt{1-\cos^2 x_0}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice : Donner le D.L à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fct Arc cos x

1. Fonction Arc sinus :

la fonction $f : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$

$x \mapsto \sin x$

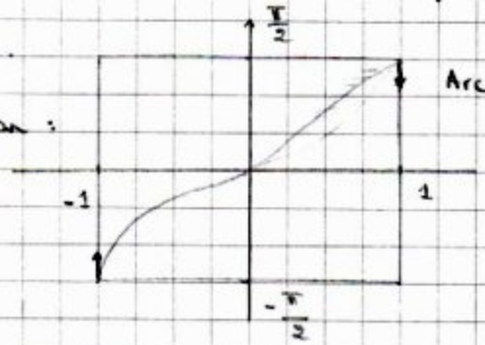
est strictement ↑ et continue sur $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de plus $f([\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1,1]$

f est donc bijective et admet une réciproque : $f^{-1} : [-1,1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$x \mapsto f^{-1}(x) = \text{Arc sin } x$

Continue et strict ↑ sur $[-1,1]$.

La Courbe $C_{f^{-1}}$ est donnée par :



- f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$

avec : $\boxed{(\text{Arc sin } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

on a :

$y = \text{Arc sin } x \iff \begin{cases} x = \sin y \\ \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ et

Ex :

a - D.L à l'ordre 5 au voisinage de 0 de $f(x) = \text{Arc sin } x$

b - Mq $\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \dfrac{\pi}{2}$

* avec la dérivée $\forall x \in [-1,1]$

* $\text{Arcsin } x = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arccos } x$ (directement)

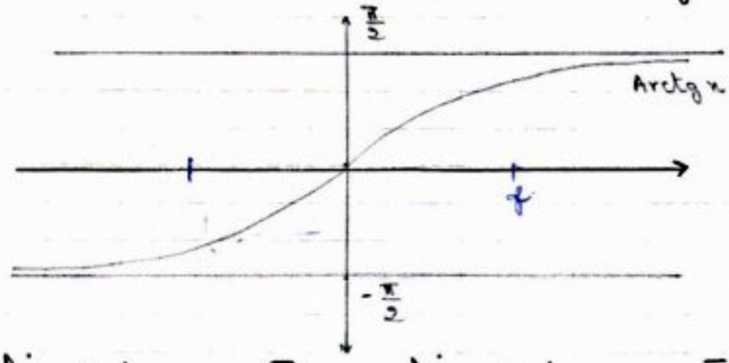
2 - Fonction Arctg x :

$f :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est continue strict ↑ avec $f(]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \text{tg } x$ Donc f est bijective et admet une fct

réciproque : $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ continue et strict ?

$x \longmapsto f^{-1}(x) = \text{Arctg } x$



$\lim_{x \to +\infty} \text{Arctg } x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to -\infty} \text{Arctg } x = \frac{-\pi}{2}$

- Arctg x est impair
- $(\text{Arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Dém :

$x \in \mathbb{R}$, $\exists x_0 \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tq : $x = \text{tg } x_0 = f(x_0)$

$(\text{Arctg } x)' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1+x^2}$

Ex : D.L à l'ordre $(2n+2)$ de Arctg x au voisinage de 0

$$y = \text{Arctg } x \iff \begin{cases} x = \text{tg } y \\ \frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2 - Fonctions hyperbolique :

a - Cosinus et sinus hyperboliques :

- Cosinus hyperbolique : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \boxed{\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$

- Sinus hyperbolique : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

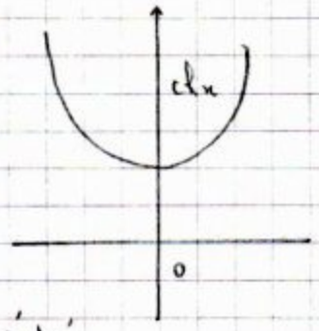
$x \longmapsto f(x) = \boxed{\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$

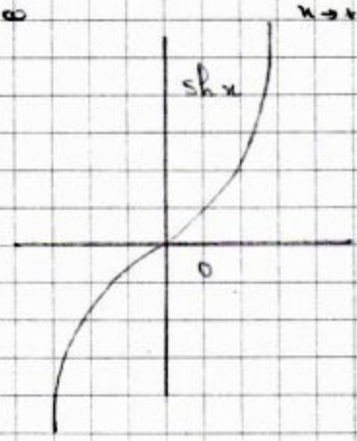
- $e^x = \underbrace{\text{ch } x}_{\text{partie paire}} + \underbrace{\text{sh } x}_{\text{partie impaire}}$
- $\text{ch}(-x) = \text{ch } x$
- $\text{sh}(-x) = -\text{sh } x$
- $(\text{ch } x)' = \text{sh } x$ $\quad (\text{sh } x)' = \text{ch } x$

ETUDUP .com

• $ch\ 0 = 1$ $\quad sh\ 0 = 0$

• $\lim_{|x| \to +\infty} ch\ x = +\infty$ • $\lim_{x \to -\infty} sh\ x = -\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} sh\ x = +\infty$





Propriétés :

• $ch\ (x+y) = ch\ x\ ch\ y + sh\ x\ sh\ y$

• $sh\ (x+y) = sh\ x\ ch\ y + sh\ y\ ch\ x$

• $ch^2 x - sh^2 x = 1$

• $ch\ (2x) = ch^2 x + sh^2 x$

• $sh\ (2x) = 2\ ch\ x\ sh\ x$ • $sh\ x = \frac{2t}{1-t^2}$ $\quad ch\ x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$

avec : $\left\{ t = th\left(\frac{x}{2}\right) \right\}$

b - Tangente hyperbolique :

$$th\ x = \frac{sh\ x}{ch\ x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

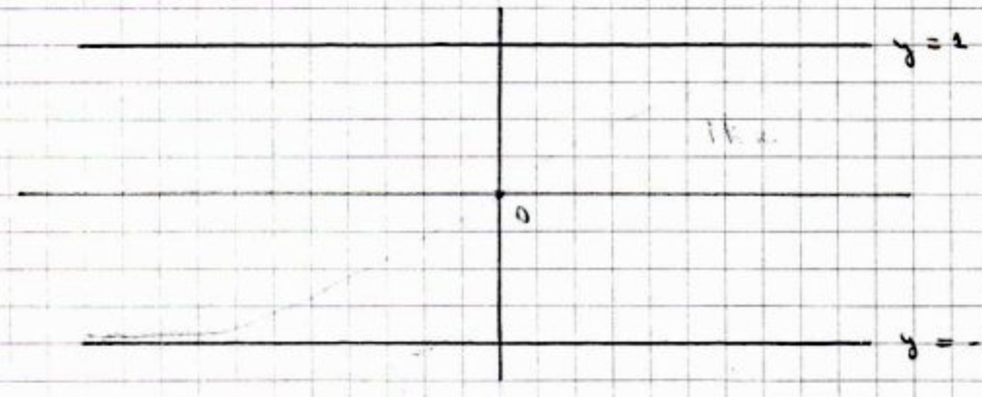
$$\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right)$$

• $th\ x$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier

• $th\ (-x) = -th\ (x)$

• $(th\ x)' = \frac{1}{ch^2 x} > 0$

• $th\ (0) = 0$



ETUDUP .com

Propriétés :

- $1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$; $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x$
- $th(x+y) = \frac{thx + thy}{1 - thx\, thy}$

Exercice :

Etudier et représenter graphiquement la fct $coth(x) = \frac{1}{thx}$

Ex : On considère $f(x) = \log(|x-1| + |x+1|)$

a - Donner D_f ? Continuité ? parité ?

b - Exprimé f sans les valeurs absolues

c - Etudier la dérivabilité en 1 et -1

d - Mq f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Calculer $f'(x)$

e - Etudier la tangente en $(1, f(1))$ Allure de C_f sur $[-2, 2]$?

Corrigé : (TD)

3 - Fonctions hyperboliques réciproques :

a - Fonction argument sinus hyperbolique :

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = shx$ est une fonction continue et strict ↗ croissante sur $\mathbb{R}$, de plus $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. f est donc bijective et admet une fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f^{-1}(x) = Arg\, shx$ qui est continue et strict ↗

en a : $\boxed{y = Arg\, shx \Rightarrow x = shy}$

Exprimons $y = Arg\, shx$ en fonction de x

On a $x = shy$. D'autre part on a $ch^2 y - sh^2 y = 1$

$\Rightarrow ch^2 y = 1 + sh^2 y = 1 + x^2 \Rightarrow chy = \sqrt{1+x^2}$

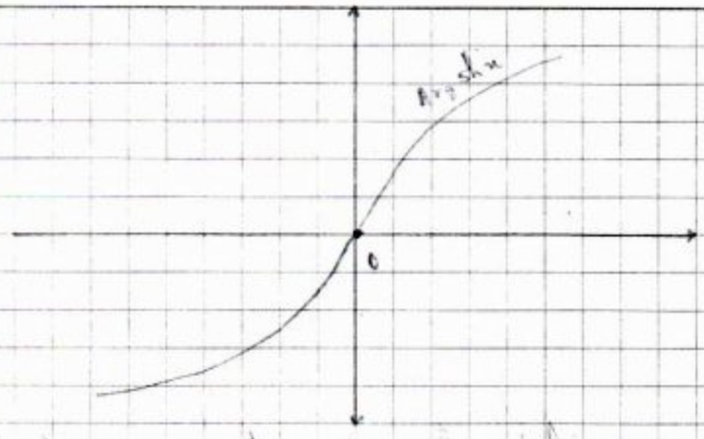
$e^y = chy + shy = x + \sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$

on a : $\boxed{Arg\, shx = \log(x + \sqrt{1+x^2})}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Par suite $\boxed{(Arg\, shx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}}$

ETUSUP.com



1 - Fonction argument cosinus hyperbolique :

La fonction $f : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$, $x \mapsto \operatorname{ch} x$ est continue et strict ↗ sur $[0, +\infty[$. Donc bijective et admet une fonction réciproque $f^{-1} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$, $x \mapsto f^{-1}(x) = \operatorname{Arg ch} x$ qui est continue et strict ↗ sur $[1, +\infty[$

$$\begin{cases} y = \operatorname{Arg ch} x \\ x \geqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \operatorname{ch} y \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Ex : Donner le domaine de déf de : $f(x) = \operatorname{Arg ch}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$

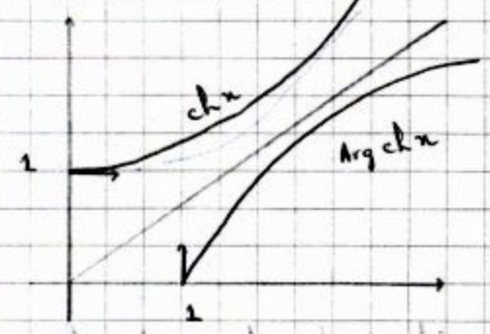
• Exprimons $y = \operatorname{Arg ch} x$ en fonction de x on a : $x = \operatorname{ch} y$

$\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1 \Rightarrow \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - 1 = x^2 - 1 \Rightarrow \operatorname{sh} y = \sqrt{x^2-1}$

$e^y = \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y = x + \sqrt{x^2-1} \Rightarrow y = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

$$\boxed{\operatorname{Arg ch} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \text{ avec } x > 1}$$

on a : $$\boxed{(\operatorname{Arg ch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ pour } x > 1}$$



2 - Fonction argument tangente hyperbolique :

La fonction $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$, $x \mapsto f(x) = \operatorname{th} x$ est continue et strict ↗ avec $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$

Donc f est bijective et admet une fonction réciproque

ETUDUP.com

$f^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ qui est continue et strict ↑
$x \mapsto \text{Arg th } x$

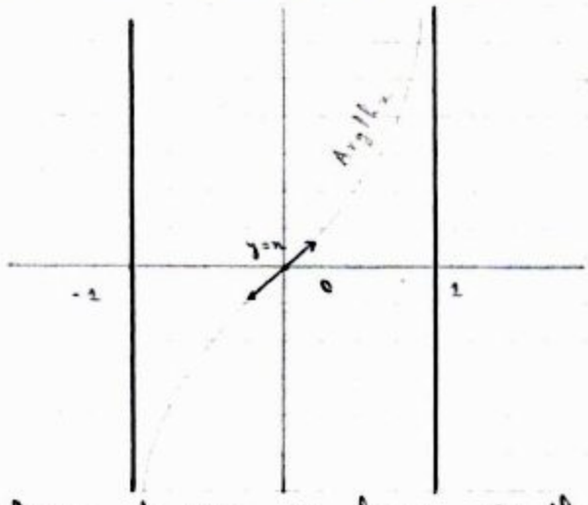
$$y = \text{Arg th } x \iff x = \text{th } y \quad , \quad x \in]-1,1[$$

$$y = \text{Arg th } x \iff x = \text{th } y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \Rightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\boxed{\text{Arg th } x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

$$\boxed{(\text{Arg th } x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad , x \in]-1,1[}$$



Exercice : 1/ Donner le D.L de $f(x) = \text{Arg th } x$ à l'ordre $(2n+1)$

2/ Etudier en utilisant le D.L de f, la position de la tangente en 0 par rapport à C_f

3/ D.L de Arg ch x, Arg sh x à l'ordre n.

ETUSUP .com

et encore plus..